

Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 1 (с. 193, см. решение: выпуск 4, с. 218) опубликована

Задача 1.3. Может ли сумма чисел вида $a \sin(k\pi/n)$, где a — рациональное число, k, n — целые, равняться $\sqrt{1997}$?

(В. А. Сендеров, А. Я. Белов)

В этой связи стоит привести полезные тождества.

Задача 1.3'. Докажите равенства:

$$\text{а) } \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}; \quad \text{б) } \sum_{k=0}^{p-1} e^{k^2 \cdot 2\pi i/p} = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{при } p = 4k + 1, \\ \sqrt{-p} & \text{при } p = 4k - 1. \end{cases}$$

Пункт б) используется при доказательстве квадратичного закона взаимности.

(В. А. Сендеров, А. Я. Белов)

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 4, с. 222) опубликована

Задача 2.5. Дано выпуклое тело в пространстве. Докажите, что можно отметить 4 точки на его поверхности так, чтобы касательная

(т. е. опорная плоскость) в каждой отмеченной точке была параллельна плоскости, проходящей через остальные три. (А. Я. Белов)

Решение этой задачи использует *экстремальный принцип*. Похожие идеи весьма распространены в комбинаторной геометрии, в частности, используются в следующей задаче:

Задача 2.5'. а) Дана выпуклая фигура. Докажите, что вокруг неё можно описать n -угольник так, чтобы точки касания были серединами звеньев.

б) Тот же вопрос для пятиконечной звезды.

в) Дан выпуклый n -угольник M . Докажите, что существует замкнутая ломаная, вписанная в M , соседние звенья которой имеют равные углы с соответствующими сторонами M . (А. Я. Белов)

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 18, с. 262) опубликована

Задача 3.5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена.

(Теорема Гаусса — Люка)

См. также задачу на схожий сюжет (выпуск 28, с. 239):

Задача 3.5'. Даны многочлены P , Q степени n с вещественными корнями x_1, \dots, x_n ; y_1, \dots, y_n соответственно. Пусть $z_1 < \dots < z_{n-1}$; $t_1 < \dots < t_{n-1}$ — корни производных P' и Q' соответственно, и пусть кроме того $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n$. Докажите, что $z_1 < t_1 < z_2 < t_2 < \dots < z_{n-1} < t_{n-1}$. (Фольклор)

В продолжение темы:

Задача 3.5''. В условиях задачи 3.5 докажите, что центры тяжести многоугольника корней многочлена и многоугольника корней его производной совпадают. (Фольклор)

Приведем ещё одну задачу на схожие идеи с Московской городской студенческой олимпиады по математике (1 секция, 1981 год).

Задача 3.5'''. Пусть все корни многочлена $P(x)$ степени n — различные действительные числа, и пусть $c > 0$. Множество точек x таких, что $P'(x)/P(x) > c$, есть объединение конечного числа непересекающихся интервалов. Докажите, что сумма их длин равна n/c .

(Фольклор)

В выпуске 4 (с. 216, см. решение: выпуск 5, с. 228–229) опубликована

Задача. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$F(x + y) = A(x) + B(x)C(y).$$

(А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин)

В выпуске 28 (с. 239) опубликована

Задача 4.8'. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$\Phi(a + b + c) = \phi(a)\phi(b)\phi(c). \quad (\text{Дж. Максвелл})$$

В этой связи мы предлагаем подумать над функциональным неравенством:

Задача 4.8''. а) Пусть функция f вещественного переменного удовлетворяет функциональному неравенству $|f(x + y) - f(x) - f(y)| < 1$. Докажите, что существует решение g уравнения Коши $g(x + y) = g(x) + g(y)$ такое, что $|f(x) - g(x)| < 1$. (U. Vishne)

По аналогии возникает задача

б) Решите функциональное неравенство:

$$|F(x + y) - (A(x) + B(x)C(y))| < 1. \quad (\text{А. Я. Канель-Белов})$$

Функциональные уравнения — распространенная олимпиадная тема, особенно на Международной математической олимпиаде (см. также: 18-я Летняя конференция международного математического Турнира городов, 2006. Задача 3. Функциональные уравнения <https://www.turgor.ru/lktg/2006/3/index.htm>). Удивительно, что тема функциональных неравенств на олимпиадах практически не представлена.

В выпуске 4 (с. 217, см. решение: выпуск 7, с. 194–195) опубликована

Задача 4.10. Известно, что ранг коммутатора $[A, B] = AB - BA$ равен единице. Докажите, что матрицы A и B имеют общий собственный вектор. (Фольклор)

В выпуске 27 (с. 239) опубликована

Задача 4.10'. A и B — матрицы порядка n с вещественными коэффициентами, E — единичная матрица. Известно, что $\text{Rk}([AB] + E) = 1$. Докажите, что

$$\text{Tr}((AB)^2) - \text{Tr}(A^2B^2) = \binom{n-1}{2}.$$

(Рустам Турдибаев, В. И. Романовский)

Вот задачи на схожий сюжет:

Задача 4.10''. а) Пусть A и B — операторы в \mathbb{R}^n такие, что $[A, B] = \alpha B$, $\alpha \neq 0$. Докажите, что оператор B нильпотентен, т. е. $B^k = 0$ при некотором k .

б) Докажите, что матричное уравнение $AX - XB = C$ при всех C имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрицы A и B не имеют общего собственного значения. (Фольклор)

В выпуске 5 (с. 217, см. решение: выпуск 10, с. 230–231) опубликована

Задача 5.9. а) В клетках бесконечной клетчатой ленты записаны положительные числа. Известно, что каждое число не меньше среднего арифметического трёх соседей слева и трёх справа. Докажите, что числа равны.

б) На клетчатой плоскости в клетках расставлены положительные числа так, что каждое записанное число равно среднему арифметическому 4 своих соседей. Докажите, что все числа равны.

в) Верно ли аналогичное утверждение для пространственной решетки? (И. Ф. Шарыгин)

Решению этой задачи были посвящены статьи П. Шольце¹⁾ «О отрицательных гармонических функциях на решётке» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 10, М.: МЦНМО, 2006, с. 236–242) и С. Г. Слободника «Дискретные положительные гармонические функции» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 11, М.: МЦНМО, 2007, с. 145–148).

На тот же сюжет читателю предлагается

Задача 5.9'. Функция $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется дискретно гармонической, если значение в любом узле решётки равно среднему арифметическому значений в соседних узлах. Предположим, что известны значения такой функции f во всех ненулевых точках решётки с чётными координатами. Можно ли по этой информации восстановить значение f в начале координат? (Л. Радзивиловский)

В выпуске 8 (с. 246, см. решение: выпуск 9, с. 215–217) опубликована

Задача 8.5. Для иррационального $\alpha > 1$ обозначим

$$N(\alpha) = \{[n\alpha] \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

¹⁾ Ныне Петер Шольце — лауреат Филдсовской премии 2018 г. В 2005 г. был членом сборной Германии на Международной математической олимпиаде, тогда он решил эту задачу и написал статью для «Математического просвещения».

При каких k найдутся такие $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, что множества $N(\alpha_1), \dots, N(\alpha_k)$ задают разбиение натурального ряда?

(А. А. Заславский, А. В. Спивак)

Предваряя разговор об обобщении этого сюжета, напомним задачу 4-го Турнира городов (весна 1983 г., 9–10 кл., № 5т).

Задача 8.5'. Закрашены k вершин правильного n -угольника P . Закраска называется почти равномерной, если для любого натурального t верно следующее условие: если M_1 — множество t расположенных подряд вершин и M_2 — другое такое множество, то количество закрашенных вершин в M_1 отличается от количества закрашенных вершин в M_2 не больше, чем на 1. Доказать, что для любых натуральных n и k ($k < n$) почти равномерная закрашка существует и что она единственна с точностью до поворотов закрашенного множества.

(М. Л. Концевич)

Совет. Поиграйте с малыми n и k .

В выпуске 26 (с. 269, см. решение: выпуск 27, с. 253–254) опубликована

Задача 11.7'. Докажите, что

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (\text{Фольклор})$$

Продолжением темы служит

Задача 11.7''. Докажите, что

$$p \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p - kq)^{k-1} (r + kq)^{n-k} = (p + r)^n. \quad (\text{Фольклор})$$

В выпуске 27 (с. 242) опубликована

Задача 13.6'. а) Пусть A — матрица второго порядка. Тогда

$$\det(A) = \frac{\text{Tr}^2(A) - \text{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) Пусть A — матрица n -го порядка. Тогда $\det(A)$ есть многочлен S_n с рациональными коэффициентами от величин $\text{Tr}(A^k)$, $1 \leq k \leq n$.

(Фольклор)

Продолжением темы служит

Задача 13.6''. а) Определим функции

$$t_k^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть $R(t_1^{(n)}, \dots, t_{n+1}^{(n)}) = 0$ для некоторого многочлена R . Докажите, что R делится на S_{n+1} . (Определение многочлена S_m см. выше в п. б) задачи 13.6'.

б) Определим функции

$$t_k^{(n,m)} = \sum_{i=1}^n x_i^k - \sum_{j=n+1}^{m+n} x_j^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Докажите, что существует такой многочлен Q_{n+1} , что если

$$R(t_1^{(n,m)}, \dots, t_{m+n+1}^{(n,m)}) = 0$$

для некоторого многочлена R , то R делится на Q_{n+1} .

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 13 (с. 181) опубликована

Задача 13.12. Докажите, что следующие числа могут начинаться с любой комбинации цифр: а) 2^{n^2} ; б) $2^{2^n 3^k}$.

в) Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{2^n} , $c \in A$, периодична, счётно, а множество $B \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{10^n} , $c \in B$, периодична, несчётно.

(А. Канель)

С ней связана

Задача 13.12'. а) Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Докажите, что множество дробных частей $\{\alpha \cdot n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, всюду плотно и равномерно распределено на единичном отрезке.

(Фольклор)

б) Лемма Кронекера. Пусть α_i , $i = 1, \dots, k$, линейно независимы над \mathbb{Q} . Докажите, что множество векторов из дробных частей $\{\alpha_1 \cdot n\}$, \dots , $\{\alpha_k \cdot n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, всюду плотно и равномерно распределено в единичном кубе.

Лемма Вейля. Пусть многочлены P_i , $i = 1, \dots, k$, линейно независимы над \mathbb{Q} по модулю многочленов с рациональными коэффициентами и констант. Докажите, что множество векторов из дробных частей $\{P_1(n)\}$, \dots , $\{P_k(n)\}$, где $n \in \mathbb{N}$:

в) всюду плотно;

г) равномерно распределено в единичном кубе.

В выпуске 17 (с. 197) опубликована

Задача 17.7. На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами взяли по точке A_i . Найти объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотреть все 5 возможностей.

(А. Я. Канель)

Развитием темы служит

Задача 17.7' (на исследование). На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами в n -мерном пространстве взяли по точке A_i . Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите случаи кубов, октаэдров, тетраэдров, а также три исключительных многогранника в четырёхмерье (три правильных многогранника, не аналогичных трёхмерным).

Рассмотрите случай k -мерных граней. (А. Я. Канель)

В выпуске 20 (с. 250–251) опубликована

Задача 20.8. а) Дан полный граф на n вершинах. Двое по очереди красят его рёбра. Первый красит одно ребро красным, второй красит 100 рёбер в синий цвет, и так повторяется, пока все рёбра не будут покрашены. Может ли первый при достаточно больших n добиться появления полного подграфа со 100 вершинами и всеми красными рёбрами? (А. Я. Канель-Белов)

б) В красный цвет раскрашены 99% рёбер полного графа из n вершин. Верно ли, что при достаточно большом n найдётся полный подграф из 1000 вершин с рёбрами одного цвета? (А. Я. Канель-Белов)

в) Каждое k -элементное подмножество множества $\{1, \dots, n\}$ раскрашено в один из s цветов. Докажите, что при достаточно большом n найдётся такое подмножество $U \subset \{1, \dots, n\}$, что все его k -элементные подмножества — одного и того же цвета, причём если x — минимальный элемент из U , то число элементов в U не меньше $x + 2s$. (Фольклор)

Развитием темы служит

Задача 20.8'. а) Рассмотрим полный граф на 2^{\aleph_0} вершинах, ребра которого раскрашены в \aleph_0 цветов. Верно ли, что найдётся одноцветный треугольник?

б1) [Для доказавших существование такого треугольника.] Для какого максимального k можно гарантированно найти одноцветный полный подграф на k вершинах?

б2) [Для доказавших, что такой треугольник может не найтись.] Для какой максимальной мощности числа вершин полного графа, раскрашенного в \aleph_0 цветов, одноцветный треугольник может не найтись? (Л. Радзивилловский)

В выпуске 24 (с. 175–176) опубликована

Задача 24.2. а) Пусть 0 — притягивающая точка непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ (т. е. $0 < |f'(0)| < 1$). Положим $k = f'(0)$.

Докажите для всех x_0 из некоторой окрестности нуля существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k^n} =: g(x_0),$$

непрерывность функции g и тождество $g(k \cdot g^{(-1)}(x)) = f(x)$.

б) Докажите, что если f бесконечно дифференцируема, то и g тоже бесконечно дифференцируема.

в) Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}{2} \dots = \frac{4-x^2}{\sqrt{2 \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}}.$$

(А. Я. Канель-Белов)

Продолжением темы служит

Задача 24.2''. Пусть $f(0) = 0$, $f'(0) = k \neq 0$. Нас будет интересовать, когда функцию комплексного переменного $f(x)$ можно сопрячь с функцией $k \cdot x$ в окрестности нуля. (Функции f_1, f_2 сопряжены, если $f_1 = G \circ f_2 \circ G^{(-1)}$ для некоторой функции G .)

а) Пусть функция f аналитична и $|k| \neq 1$. Тогда существует аналитическая функция G такая, что $f(x) = G(kG^{(-1)}(x))$ для всех x .

б) Пусть $k^n = 1$, где n целое. Приведите пример аналитической функции f , не сопряжённой с линейной в окрестности нуля.

в) Пусть f бесконечно дифференцируема, k не есть корень из единицы. Тогда f сопряжена линейной функции как формальный степенной ряд.

г) Покажите, что при некотором k этот ряд может расходиться.

д) Докажите, что для некоторых k , таких что $|k| = 1$, функция f всё же всегда сопряжена линейной, если она аналитична.

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 24 (с. 176, см. решение: выпуск 25, с. 186–187) опубликована

Задача 24.6. Пусть P_1, \dots, P_k — многочлены от x_1, \dots, x_n , $k < n$, с а) комплексными; б) действительными коэффициентами. Возможно ли равенство многочленов:

$$P_1^2 + \dots + P_k^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2? \quad (\text{Фольклор})$$

Продолжением темы служит

Задача 24.6'. Докажите, что многочлен

$$P(x, y) = 1 + x^2 y^4 + x^4 y^2 - 3x^2 y^2$$

принимает только неотрицательные значения, но при этом не является суммой квадратов многочленов. (Фольклор)

В выпуске 26 (с. 265, см. решение: выпуск 27, с. 263–265) опубликована

Задача 26.1. Найдите предел

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{1-t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2} \right). \quad (\text{Фольклор})$$

В выпуске 28 (с. 246–247) опубликована

Задача 26.1'. а) Сравнивая сумму $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ с интегралом $\int_1^k \frac{1}{x} dx$, докажите, что

$$n! \sim \sqrt{2c \cdot n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

для некоторого c .

(Абрахам де Муавр)

б) Оценивая биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ с помощью пункта а), воспользовавшись равенством

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

и интегралом Гаусса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

покажите, что константа c из предыдущего пункта равна π .

(Джеймс Стирлинг)

в) Докажите, что

$$n! = \sqrt{2\pi \cdot n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \exp \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k n^{-k} \right),$$

при этом все a_k — рациональные числа.

(Фольклор)

Продолжением темы служит

Задача 26.1''. Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} (n - |n - k|) \cdot \sqrt[n]{e^k}}{n^2}. \quad (\text{Фольклор})$$

В выпуске 26 (с. 265–266) опубликована

Задача 26.3. Пусть n — натуральное число, p — простое число. Докажите, что число способов представить n в виде суммы нескольких

натуральных чисел, идущих в порядке невозрастания и не делящихся на p , равно числу способов представить n в виде суммы натуральных чисел, среди которых нет p одинаковых. (А. Я. Канель-Белов)

Продолжением темы служат следующие задачи.

Задача 26.3'. Разбиением натурального числа называется его представление в виде суммы натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Число всех разбиений данного числа n обозначается $P(n)$. Назовем длиной разбиения число различных слагаемых в нём. Докажите, что сумма длин всех разбиений числа n равняется $P(1) + P(2) + \dots + P(n-1)$. (Фольклор)

Задача 26.3''. Докажите тождество:

$$(1-x) \cdot (1-x^2)(1-x^3) \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{(3k^2-k)/2} + x^{(3k^2+k)/2}).$$

(Фольклор)

В выпуске 27 (с. 234, см. решение: выпуск 28, с. 261–262) опубликована

Задача 27.3. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно выдвинуть из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были заде- ты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n -мерного пространства. (А. Я. Канель-Белов)

Родственная задача 27.3' опубликована в выпуске 28 (с. 247). Продолжением темы служит

Задача 27.3''. Можно ли расположить в пространстве между двумя параллельными плоскостями систему выпуклых тел так, чтобы ни одно из них нельзя было выдвинуть? (Фольклор)

В выпуске 28 (с. 234) опубликована

Задача 28.6. Докажите, что радикальный центр трёх полувписанных окружностей треугольника (т. е. окружностей, которые касаются двух сторон треугольника и его описанной окружности) лежит на прямой OI , где O — центр описанной окружности, а I — центр вписанной окружности. (К. В. Козеренко)

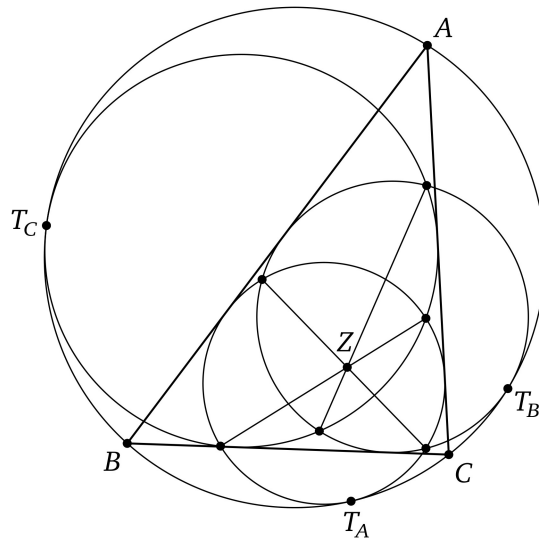


Рис. 1

В развитие сюжета:

ЗАДАЧА 28.6'. Обозначим через Z радикальный центр трёх полу-вписанных окружностей ω_A , ω_B и ω_C треугольника ABC (рис. 1). Пусть T_A, T_B, T_C — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Рассмотрим следующую инверсию (точнее говоря, антиинверсию) с полюсом в точке Z : точке X ставится в соответствие такая точка X' , что $\overrightarrow{XZ} \cdot \overrightarrow{X'Z} = D$, где D — степень точки Z относительно любой из трёх полу-вписанных окружностей. Положим $T'_A = \text{Inv}_Z(T_A)$, $T'_B = \text{Inv}_Z(T_B)$, $T'_C = \text{Inv}_Z(T_C)$.

а) Докажите, что точки B, T'_B, T'_C, C лежат на одной окружности (аналогично для четвёрок точек A, T'_A, T'_B, B и A, T'_A, T'_C, C), см. рис. 2. Эти окружности назовём полуописанными.

б) Обозначим через Q радикальный центр трёх полуописанных окружностей. Докажите, что точка Q лежит на прямой OI .

(К. В. Козеренко)

В выпуске 28 (с. 234–235) опубликована

ЗАДАЧА 28.7. Докажите равенства

а) $\cos \frac{8\pi}{35} + \cos \frac{12\pi}{35} + \cos \frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{5} + \sqrt{7} \sin \frac{2\pi}{5} \right)$. (В. А. Сендеров)

б) $\sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{7\pi}{19} + \cos \frac{11\pi}{19}} + \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{19} + \cos \frac{5\pi}{19} + \cos \frac{17\pi}{19}} +$
 $+ \sqrt[3]{\cos \frac{9\pi}{19} + \cos \frac{13\pi}{19} + \cos \frac{15\pi}{19}} =$

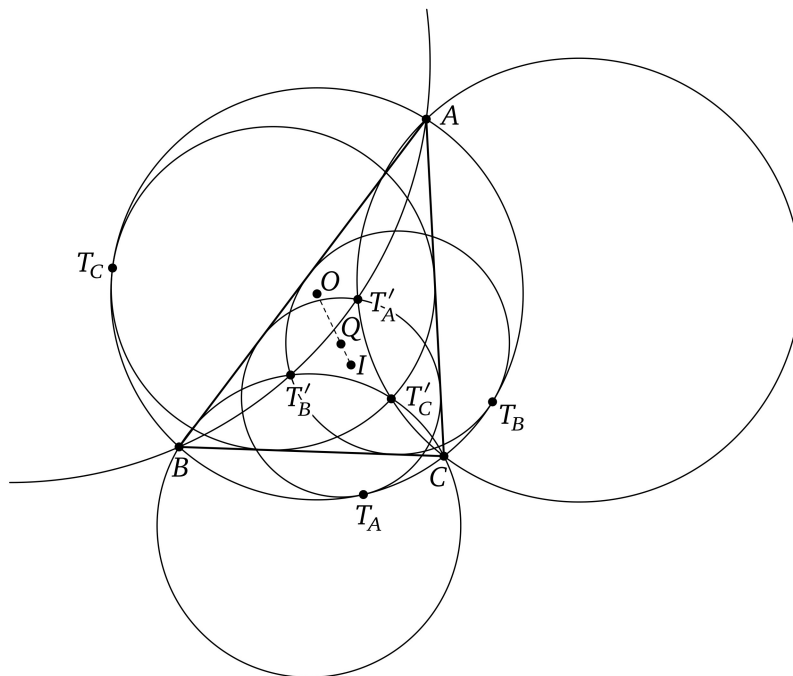


Рис. 2

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2} - 3\sqrt[3]{7} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49} + 18\sqrt[3]{7} - 25} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49} + 18\sqrt[3]{7} - 44}}.$$

(С. В. Маркелов)

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & \sqrt[5]{\frac{\cos(2\pi/11) \cos(4\pi/11)}{\cos^2(16\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(4\pi/11) \cos(8\pi/11)}{\cos^2(32\pi/11)}} + \\ & + \sqrt[5]{\frac{\cos(8\pi/11) \cos(16\pi/11)}{\cos^2(2\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(16\pi/11) \cos(32\pi/11)}{\cos^2(4\pi/11)}} + \\ & + \sqrt[5]{\frac{\cos(32\pi/11) \cos(2\pi/11)}{\cos^2(8\pi/11)}} = \\ & = \sqrt[5]{276 + 170\sqrt[5]{11} - 40\sqrt[5]{11^2} - 80\sqrt[5]{11^3} - 15\sqrt[5]{11^4}}. \end{aligned}$$

(С. В. Маркелов, К. И. Пименов)

В продолжение сюжета:

Задача 28.7'. Докажите равенства:

$$\text{а)} \quad \sqrt[5]{\frac{\cos(2\pi/11) \cos(8\pi/11)}{\cos^2(4\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(4\pi/11) \cos(16\pi/11)}{\cos^2(8\pi/11)}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt[5]{\frac{\cos(8\pi/11)\cos(32\pi/11)}{\cos^2(16\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(16\pi/11)\cos(2\pi/11)}{\cos^2(32\pi/11)}} + \\
& + \sqrt[5]{\frac{\cos(32\pi/11)\cos(4\pi/11)}{\cos^2(2\pi/11)}} = \\
& = \sqrt[5]{177 - 40\sqrt[5]{11} - 5\sqrt[5]{11^2} + 15\sqrt[5]{11^3} - 25\sqrt[5]{11^4}}; \\
\text{б) } & \sqrt[3]{\sin \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\sin \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\sin \frac{8\pi}{7}} = \\
& = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{3}\sqrt[3]{7} - 2} + \sqrt[3]{3\sqrt[3]{7} - 4} + \sqrt[3]{3\sqrt[3]{7} - 5}}; \\
\text{в) } & \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\sin \frac{2\pi}{9} - 1\right)^{1/3} + \frac{1}{3}6^{2/3}} + \sqrt[3]{-\left(-\sqrt{3}\sin \frac{1\pi}{9} + 1\right)^{1/3} + \frac{1}{3}6^{2/3}} + \\
& + \sqrt[3]{-\left(\sqrt{3}\sin \frac{4\pi}{9} + 1\right)^{1/3} + \frac{1}{3}6^{2/3}} = \\
& = \frac{1}{2}(-2073 \cdot 3^{1/3} + 6912 \cdot 3^{2/3} + 18432)^{1/9}; \\
\text{г) } & \sqrt[3]{\left(27\left(2\sqrt{3}\sin \frac{2\pi}{9} - 1\right)^{1/3} - 18 \cdot 3^{1/3}\right)^{1/3} + 3^{4/9}} + \\
& + \sqrt[3]{-\left(27\left(2\sqrt{3}\sin \frac{4\pi}{9} + 1\right)^{1/3} + 18 \cdot 3^{1/3}\right)^{1/3} + 3^{4/9}} + \\
& + \sqrt[3]{-\left(-27\left(2\sqrt{3}\sin \frac{1\pi}{9} + 1\right)^{1/3} + 18 \cdot 3^{1/3}\right)^{1/3} + 3^{4/9}} = \\
& = -(-1458 \cdot 3^{2/3} + 81 \cdot 3^{1/3} + 2916)^{1/9}.
\end{aligned}$$

(С. В. Маркелов, К. И. Пименов)

См. также: Маркелов С. В. О тождествах Рамануджана // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 218–219.

В выпуске 28 (с. 235) опубликована

Задача 28.13. Внутри тетраэдра единичного объёма находится параллелепипед. Каков максимально возможный его объём?

(А. Я. Канель-Белов)

Можно поставить обратный вопрос:

Задача 28.13'. В единичный n -мерный куб вписан тетраэдр (не обязательно правильный). Каков максимально возможный его объём?

Решите задачу сначала в случаях $n = 3, 7$. (Л. Радзивиловский)